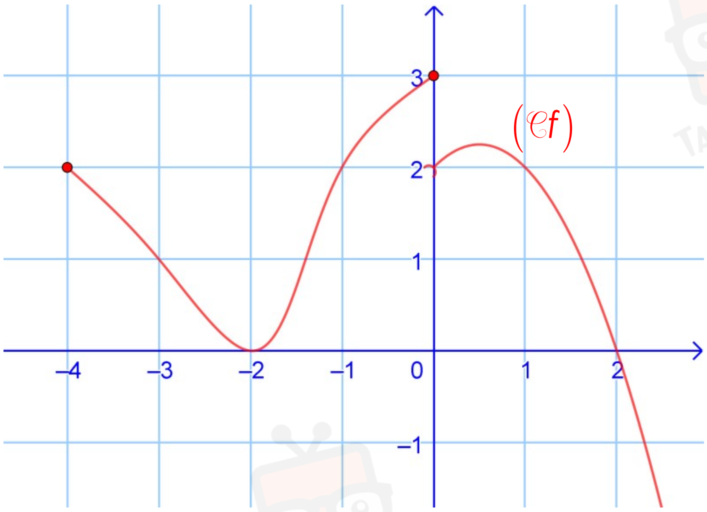
EXERCICE 1 (5pts)

Dans la figure ci-dessous on a représenté dans un repère orthogonal la courbe $(\mathscr{C}f)$ d'une fonction f définie sur $[-4,+\infty[$.



1. On admet que pour tout $x \in]0,+\infty[$, $f(x) = ax^2 + bx + 2$.

   a- Montrer que $a = -1$ et $b = 1$.

   b- Déterminer $f([-1,1])$ et $f([0,+\infty[)$.

2. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l' équation $E(f(x)) = 2$.

3. Soit g la fonction définie par $g(x) = \dfrac{1}{2-f(x)}$.

   a- Déterminer l'ensemble de définition de g.

   b- Déterminer le sens de variation de g sur $]-4,-2[$.

EXERCICE 2 (7pts)

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \begin{cases} x^3 + 3x^2 + x - 1 & \text{si } x \in]0,+\infty[\\ \dfrac{\sqrt{x^4 + x^2 + 1}}{x^2+1} & \text{si } x \in]-\infty,0] \end{cases}$.

1. a- Montrer que l'équation $f(x) = 1$ admet une solution α dans $\left[\frac{1}{3},1\right]$.

   b- Vérifier que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $x^3 + 3x^2 + x - 2 = (x+2)(x^2 + x - 1)$.

   c- Déterminer la valeur exacte de α.

2. a- Montrer que pour tout $x \in]-\infty,0]$, $\sqrt{x^4 + x^2 + 1} \le x^2 + 1$.

   b- Déduire que f est majorée par 1.

   c- Montrer que 1 est le maximum de f sur $]-\infty,0]$.

3. a- Montrer que f est minorée par -1 sur $]0,+\infty[$.

b- Montrer que $\frac{\sqrt{3}}{2}$ est le minimum de f sur $]-\infty,0]$.

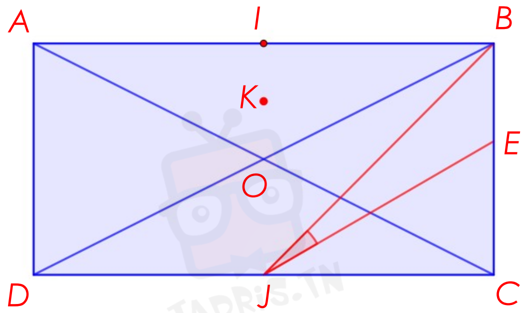
c- Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $f(x)=-3$.

EXERCICE 3 (8pts)

Soit $ABCD$ un rectangle de centre O tel que $AB=8$ et $AD=4$.

On désigne par I, J et K les milieux respectifs des segments $[AB]$, $[DC]$ et $[OI]$.

On note E le point de $[BC]$ tel que $\widehat{EJC}=\frac{\pi}{6}$.



1. a- Calculer JB, JE et EC.

b- Montrer que $\overrightarrow{JE}.\overrightarrow{JB}=16\left(\frac{1+\sqrt{3}}{\sqrt{3}}\right)$.

c- Déduire que $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)=\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$.

2. a- Montrer que pour tout point M du plan $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}.\overrightarrow{MD}=2MO^2-24$.

b- Calculer $\overrightarrow{KA}.\overrightarrow{KB}$ et déduire $\overrightarrow{KC}.\overrightarrow{KD}$.

c- Déterminer l'ensemble $(\mathscr{C})$ des points M du plan tels $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}.\overrightarrow{MD}=-22$.

3. a- Montrer que $\overrightarrow{KD}.\overrightarrow{KB}=-19$.

b- Déterminer l'ensemble (Δ) des points M du plan $\overrightarrow{KD}.\overrightarrow{KM}=-19$.

4. a- Montrer que pour tout point M du plan $MA^2+MB^2+MC^2+MD^2=4MO^2+80$.

b- Déterminer l'ensemble (Γ) des points M du plan $MA^2+MB^2+MC^2+MD^2=160$.